DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2011.09.030

第 29 卷 第 9 期 2011 年 9 月

河 南 科 学 HENAN SCIENCE

Vol.29 No.9 Sep. 2011

文章编号：1004-3918(2011)09-1024-03

一个 F. Smarandache 函数与最大素因子函数的均值计算

谢 瑞，高 丽，赵 琴

(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘 要：在 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 及真因子序列 $\{q_d(n)\}$ 的基础上，构造并研究了 $\sum_{n\le x}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2$ 的一种均值性质，利用初等方法和素数定理证明了关于一个算术函数与最大素因子函数的混合均值问题，并给出了它的一个较强的渐进公式.

关键词：F. Smarandache 函数；最大素因子函数；渐近公式

中图分类号：O 156.4 文献标识码：A

1 引言及结论

在文献 [1] 中，Smarandache 教授引入了一个新的数列 $q_d(n)$，表示 n 的所有真因子之积，即 $q_d(n)=\prod_{\substack{d\mid n\\ d<n}} d=n^{\frac{d(n)}{2}-1}$. 对于任意自然数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$. 对于它的许多性质，不少学者进行了研究[2-4]. 关于 $S(n)$ 与最大素因子函数 $P(n)$ 的均方差估计，文献 [4] 利用初等方法及素数定理证明了一个渐近公式. 本文受此思想启示，利用初等及解析方法研究混合均值 $\sum_{n\le x}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2$ 的渐近性质，并给出了一个有规律的渐近公式，即证明了下面的定理：

定理 对任意给定的正整数 N，及任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2=\sum_{i=1}^{N}c_i\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{N+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是可计算常数且 $c_1=\frac{3}{2}\frac{\zeta^4(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}-2\zeta^2(\frac{3}{2})+\frac{2}{3}\zeta(\frac{3}{2})$，$\zeta(n)$ 为 Riemann ζ-函数.

2 引理及证明

为了得到上述定理的证明，需要下面的 3 个引理：

引理 1 设 n 为任意正整数，则有

1) 如果 n 有一个素因子 $p>\sqrt{n}$，则 $S(q_d(n))=(\frac{1}{2}d(n)-1)p$；

2) 如果 $n=n_1p_1p_2$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\sqrt{n}$，则 $S(q_d(n))=(\frac{1}{2}d(n)-1)p_2$；

3) 如果 $n=n_1p^2$ 且 $p>n_1$，则 $S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p=\frac{3}{2}pd(n_1)-p$.

收稿日期：2011-05-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10291093)；陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)

作者简介：谢 瑞(1986-)，女，陕西横山人，硕士研究生，主要研究方向为数论

通信作者：高 丽(1966-)，女，陕西绥德人，教授，硕士，主要从事数论、代数方面的研究.

证明　对任意正整数 n，设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式．于是由 Smarandache函数的性质可得 $S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}$，于是：

①当 n 有一个素因子 $p>\sqrt{n}$ 时，注意到此时 $p\geqslant\frac{1}{2}d(n)\geqslant\frac{1}{2}d(n)-1$，由 Smarandache 函数的性质及已知条件有

$$S(q_d(n))=S\left(n^{\frac{d(n)}{2}-1}\right)=S\left(p^{\frac{d(n)}{2}-1}\right)=\left(\frac{1}{2}d(n)-1\right)\cdot p.$$

②当 $n=n_1p_1p_2$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant\sqrt{n}$ 时，由 Smarandache 函数的性质可得

$$S(q_d(n))=S\left((n_1p_1p_2)^{\frac{d(n)}{2}-1}\right)=S\left(p_2^{\frac{d(n)}{2}-1}\right)=\left(\frac{1}{2}d(n)-1\right)\cdot p_2.$$

③当 $n=n_1p^2$ 且 $p>n_1$ 时，此时显然有 $n^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{n}$，于是由 Smarandache 函数的性质并注意到 $d(n)=3d(n_1)$，即有

$$S(q_d(n))-\left(\frac{1}{2}d(n)-1\right)p(n)=2p\left(\frac{1}{2}d(n)-1\right)-\frac{d(n)}{2}p+p=$$

$$\frac{1}{2}pd(n_1p^2)-p=\frac{3}{2}pd(n_1)-p.$$

于是证明了引理 1．

引理 2[5]　令 p 为素数，m 为正整数，且 $m\leqslant x^{\frac{1}{3}}$，则有渐近公式

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{N}c_i\frac{\ln^{i-1}m}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^{N+1}x}\right)+O\left(\frac{m^3}{\ln m}\right),$$

其中 c_i 为可计算常数且 $c_1=1$．

引理 3　对任意实数 $x\geqslant3$，设 A 表示所有这样整数 n 的集合，对任意素数 p，$p|n$ 当且仅当 $p\leqslant n^{\frac{1}{3}}$，则有如下估计式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2x.$$

证明　对任意正整数 $n\in A$，显然由 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质知，当 $p|n$ 时，如果 $P(n)=p$，则

$$S(q_d(n))=(\frac{1}{2}d(n)-1)p,\quad\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p\right)^2=0.$$

如果 $S(q_d(n))\neq(\frac{1}{2}d(n)-1)p$，设 $S(n)=S(p^{\alpha})$，则显然有 $\alpha\geqslant2$，注意到估计式 $\sum_{n\leqslant M}d^2(n)\ll M\cdot\ln^3M$，于是由素数定理[6-7]有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2\ll\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant n}}p^2d^2(n)\ll\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{p<n\leqslant\frac{x}{p^2}}d^2(n)\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2x.$$

于是完成了引理 3 的证明．

3　定理的证明

本节来完成定理的证明．根据引理 1 的(1)式对任意正整数 n，如果存在素数 $p|n$ 且 $p>\sqrt{n}$，则有 $S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)P(n)=0$，于是结合引理 1 的(2)式和引理 3 并注意到 Riemann ζ-函数的恒等式

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{\zeta^4(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^{\frac{3}{2}}}=\zeta^2(\frac{3}{2})$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\zeta(\frac{3}{2})$，可以得到

$$\sum_{n\leqslant x}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p>\sqrt{n}}}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p\leqslant\sqrt{n}}}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,n^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{n}}}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2=$$

$$\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ n_1<p}}S(q_d(n_1p^2))-\left(\frac{1}{2}d(n_1p^2)P(n_1p^2)\right)^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2x\right)=$$

$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\left(\frac{3}{2}pd(n)-p\right)^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2x\right)=$$

$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{9}{4}d^2(n)+1-3d(n)\right]\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}p^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2x\right)=\sum_{i=1}^{N}c_i\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{N+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是可计算常数且 $c_1=\frac{3}{2}\frac{\zeta^4(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}-2\zeta^2(\frac{3}{2})+\frac{2}{3}\zeta(\frac{3}{2})$.

这就完成了定理2的证明.

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicaga: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 刘燕妮，李 玲，刘宝利. Smarandache 未解决的问题及新进展 [M]. AnnArbor: High American Press, 2008: 66-71.

[3] Chen Jianbin. Valuo distribution of the F. Smarandache LCM function [J]. Scienta Magana, 2007, 3 (2): 15-18.

[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的均值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49 (5): 1009-1012.

[5] 郭晓艳. 一个算术函数与最大素因子函数的混合均值 [J]. 陕西师范大学学报：自然科学版, 2010, 38 (2): 12-14.

[6] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海：上海科学技术出版社, 1988: 59-65.

[7] Apostol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 134-170.

On the Mean Value of a F. Smarandache Function and the Greatest Prime Divisor Function

Xie Rui, Gao Li, Zhao Qin

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China)

Abstract: Based on the famous Smarandache function $S(n)$ and factor plot sequence $q_d(n)$, the function $\sum_{n\leqslant x}\left(S(q_d(n))-(\frac{1}{2}d(n)-1)p(n)\right)^2$ is constructed and its mean value distribution properties are discussed. By using the elementary method and the prime theorem, the hybrid mean value involving an arithmetical function and the greatest prime divisor function is proved, and a sharp asymptotic formula is also given.

Key words: F. Smarandache function; the greatest prime divisor function; asymptotic formula